Anno Scolastico 2017-18

Classe 4^AS

PROGRAMMA DI MATEMATICA

Docente: **prof.ssa Elena Nobili**

Libro di testo in adozione:

M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone "3 Matematica.blu 2.0" vol. 4 - Zanichelli

Goniometria
- Le funzioni seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante
- Le funzioni inverse e relativi grafici
- Formule di addizione e di sottrazione, di duplicazione, di bisezione e parametriche razionali
- Curve goniometriche
- Equazioni e disequazioni goniometriche, sistemi

Trigoniometria
- Teoremi sul triangolo rettangolo
- Area di un triangolo
- Teorema della corda
- Teoremi sui triangoli qualunque: teorema dei seni e teorema di Carnot.
- Relazioni fra trigonometria e geometria analitica.

Numeri complessi e coordinate polari
- Calcolo con i numeri complessi in forma algebrica, rappresentazione nel piano di Gauss.
- Forma trigonometrica di un numero complesso e relative operazioni; le radici n-esime di un numero complesso.
- La forma esponenziale di un numero complesso.

Vettori, matrici e determinanti
- Vettori nel piano.
- Vettori nel piano cartesiano.
- Matrici.
- Calcolo vettoriale e calcolo matriciale.
- Determinanti.
- Matrice inversa.

Trasformazioni geometriche
- Grafici trasformati. Composizione di trasformazioni.
- Isometrie: simmetria centrale, simmetria assiale, traslazione, rotazione. Composizione di isometrie.
- Similitudini: omotetie. Composizione di similitudini.
- Affinità: dilatazione. Classificazione delle affinità.

Geometria euclidea nello spazio

- Rette e piani nello spazio. Retta e piano perpendicolari, teorema delle tre perpendicolari
- Poliedri: prisma, piramide, tronco di piramide.
- Solidi di rotazione: cilindro, cono, sfera.
- Principio di Cavalieri.
- Calcolo di superficie e volume.

Geometria analitica nello spazio

- Equazione di un piano nello spazio, piani paralleli e perpendicolari
- Equazione di una retta come intersezione di piani non paralleli
- Equazioni parametriche di una retta
- Rette parallele e perpendicolari
- Condizione di parallelismo e perpendicolarità tra rette e piani

Calcolo combinatorio e probabilità

- Permutazioni semplici e con ripetizione
- Disposizioni semplici e con ripetizione
- Combinazioni semplici

Definizione classica di probabilità.

- Teorema della probabilità contraria, teorema della probabilità totale, teorema della probabilità composta, teorema della probabilità condizionata; formula di Bayes.
- Variabili casuali discrete. La variabile binomiale

COMPITI PER LE VACANZE ESTIVE

Gli angoli e le funzioni goniometriche

Problema

Data la funzione $y = f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi + 2x)$:

a. semplifica la sua espressione;
b. trova quali trasformazioni geometriche si possono applicare, alla funzione goniometrica elementare, per tracciare il grafico della funzione data;
c. determinane il periodo;
d. determina *a* e *b* in modo che il grafico della funzione $g(x) = a + b\sin x$ passi per i punti del grafico di $y = f(x)$ di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e π.

Quesiti

1. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(2,-1)$ che forma con l'asse *x* un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Determina per quali valori di *k* esiste un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{k^2-2}{k}$.

3. Semplifica l'espressione:

$$\left(a^2-b^2\right)\cos\frac{7}{2}\pi + \frac{4ab}{\cos\pi - \sin\frac{5}{2}\pi} - \frac{a^2+b^2}{\sin\frac{3}{2}\pi}$$

4. Verifica che per $\alpha = 270°$ si ha:

$$(a+1)(a-1)\,sin(\alpha - 180°) + (4a+5)\,cos(\alpha + 90°) = (a+2)^2$$

5. Calcola il valore dell'espressione:

$$\sqrt{\frac{1-\sin 60°}{1+\sin 60°}} \cdot \frac{\cos 60°}{1-\sin 60°} + \frac{\cot 60° - \tan 45°}{1+\cot 60° \tan 45°}$$

Formule e identità goniometriche

Problema

Dato il fascio di rette di equazione $2(k-1)x+(k+1)y-3k=0$:

determinane il centro e le generatrici;
determina la misura dell'angolo formato dalle due generatrici;
scrivi l'equazione della circonferenza di centro l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e passante per il centro del fascio;
scrivi le equazioni parametriche della circonferenza.

Quesiti

1. Nel triangolo *ABC* rettangolo in *B* è $B\hat{A}C = \arcsin\frac{2}{3}$. Determina le funzioni goniometriche dell'angolo $A\hat{C}B$.

2. Semplifica l'espressione $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$.

3. Verifica la seguente identità, supponendo che gli argomenti delle funzioni goniometriche assumano valori per cui l'espressione è definita:
$$\sin^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos 4\alpha}{2}$$

4. Scrivi una rappresentazione parametrica della curva $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ e trasforma l'equazione parametrica trovata in equazione parametrica razionale mediante le formule parametriche.

5. Una funzione lineare in seno e coseno $y=a\sin x+b\cos x+c$ con $a\neq 0$ e $b\neq 0$, si può scrivere nella forma equivalente $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)+c$, dove φ è la misura dell'angolo tale che $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Dopo aver scritto la funzione lineare $y=\sin x-\cos x+1$ nella forma $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)+c$, tracciane il grafico e individua i punti di massimo e di minimo.

Equazioni goniometriche

Problema

a. Risolvi l'equazione lineare $\sqrt{3}\sin x = \cos(-x)$.

b. Interpreta graficamente le soluzioni tracciando i grafici di due opportune funzioni e determina le coordinate dei punti d'intersezione tra i due grafici compresi nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$.

c. Aggiungi 1 al secondo membro dell'equazione data e risolvila con il metodo grafico.

d. Risolvi l'equazione di cui al punto c. con il metodo algebrico.

e. Risolvi l'equazione di cui al punto c. con il metodo dell'angolo aggiunto.

f. Interpreta graficamente le soluzioni tracciando i grafici di due opportune funzioni e determina le coordinate dei punti d'intersezione tra i due grafici compresi nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$.

g. L'equazione $\sqrt{3}\sin x - 3 = -\sqrt{3}\cos x - 2\sin x \cos x$ presenta una particolarità. Quale? Indica un metodo per risolvere l'equazione proposta.

Quesiti

1. Risolvi l'equazione: $\sin^2\left(2x + 60^\circ\right) = 1$

2. Risolvi l'equazione: $(\tan 5x - 1)\left(2\cos 3x - \sqrt{3}\right) = 0$

3. Risolvi l'equazione: $\sin(5° + x) = \sqrt{3}\cos(5° + x)$

4. Risolvi l'equazione: $\sin 3x = -\sin 6x$

5. Risolvi l'equazione: $|2\sin x - 1| = \sin x - 2$

6. Risolvi l'equazione: $5\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 1 = 0$

7. Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{1}{3\sin x - 4\sin^3 x}$$

Disequazioni goniometriche ed equazioni parametriche

Problema

Data la funzione $y=\frac{\cos 2x}{2\sin x-1}$, determina:

a. il periodo;

b. il dominio:

c. gli zeri;

d. il dominio della funzione $\frac{1}{y}$;

e. per quali valori di *x* è $y<-1$.

Quesiti

1. Risolvi la disequazione: $\cos 2x>\sin x+1$ con $x\in[0,2\pi]$

2. Risolvi la disequazione: $\log_{\frac{1}{2}}\left(|\cos x|+\frac{1}{2}\right)>0$

3. Determina il dominio della funzione:

$$y=\frac{1}{\ln\left(|\sin x|-\frac{1}{2}\right)}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\geq 0\\ 1-\sqrt{2}\sin x<0\end{cases}$$

5. Discuti graficamente il sistema misto:

$$\begin{cases}\sin^2 x-\sin x-2-k=0\\ 0\leq x\leq\frac{5}{6}\pi\end{cases}$$

Trigonometria

Problema

Dato il triangolo di vertici A, B e C, sapendo che $AB = 80$ cm, $BC = 50$ cm e $A\hat{B}C = 60°$, determina:

a. il perimetro;

b. l'area;

c. il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo;

d. il raggio della circonferenza inscritta al triangolo;

e. la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.

f. È possibile che un triangolo abbia i seguenti lati: $AB = 80$ cm, $BC = 40$ cm e $AC = 30$ cm?

Quesiti

1. Nel triangolo rettangolo ABC il perimetro è 36 cm ed è $\cos A\hat{C}B = \frac{3}{5}$. Determina l'ipotenusa.

2. Nel triangolo ABC si sa che $a = 7$, $b = 5$ e che la mediana m_c è 2. Qual è la misura di AB?

3. L'area del triangolo ABC è $27a^2$. Sapendo che $\overline{AB} = 6a\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 6a$, determina $\cos A\hat{B}C$.

4. Nel triangolo ABC è $B\hat{A}C = 60^\circ$, $A\hat{B}C = 45^\circ$ e $\overline{BC} = 2a$. Determina l'area del triangolo.

5. In una circonferenza di raggio $r = 5a$ una corda AB è sottesa a un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Determina la misura della corda.

Rotazioni, similitudini e affinità

Problema

Date le equazioni $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$:

a. verifica che definiscono un'affinità;

a. stabilisci se si tratta di affinità diretta o inversa;

b. determina i punti A', B', C' corrispondenti rispettivamente di $A(1,1)$, $B(-1,2)$, $C(-2,-1)$ nell'affinità;

c. determina i punti uniti;

d. verifica che l'affinità non è una isometria.

Quesiti

1. Determina le equazioni della rotazione avente centro in $C(-1,-1)$ e angolo di rotazione $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Dopo aver scritto le equazioni della rotazione avente centro nell'origine e angolo di rotazione $\alpha = \frac{\pi}{6}$, determina l'equazione della corrispondente in questa rotazione della retta $y = 2x$.

3. Riconosci quale conica è rappresentata dall'equazione $x^2 - xy + 2y^2 - 4x + y + 3 = 0$.

4. Giustifica perché le equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + y - 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

non definiscono un'affinità.

5. Riconosci che la seguente affinità è un'isometria e classificala:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Numeri complessi, vettori e coordinate polari

Problema

Data l'espressione $\dfrac{\left(i^{93}+2i^{101}\right)^4+\left(i^{45}-2i^{86}\right)^3}{2\left(i^{15}:i^7\right)^2}-\dfrac{73+i^3}{2}$:

a. calcolane il valore;

b. indicato con z_1 il numero complesso ottenuto al punto **a.**, danne la rappresentazione geometrica e calcolane il modulo;

c. dividi il numero complesso z_1 per il numero complesso $2-i$;

d. indicato con z_2 il numero complesso che si ottiene dalla divisione al punto **c.**, interpreta geometricamente z_1+z_2 e z_1-z_2;

e. calcola la distanza tra i due punti che rappresentano z_1 e z_2 nel piano di Gauss;

f. scrivi in forma trigonometrica il numero complesso z_1.

Quesiti

1. L'insieme **C** dei numeri complessi si dice essere un campo. Spiega cosa significa tale affermazione.
2. Rappresenta nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z=x+iy$ che soddisfano la condizione $|2z-i|\leq 4$.
3. Dimostra che se due numeri complessi hanno come somma un numero reale e come prodotto un numero reale non negativo, allora i due numeri sono complessi coniugati.
4. Dato il numero complesso $z=1-\sqrt{3}i$, calcola z^9.
5. Determina le radici terze del numero $w=-27i$ e rappresenta le radici trovate nel piano di Gauss.
6. Risolvi in **C** l'equazione:

   $z^2-2z+1+2i=0$

Geometria nello spazio

Problema

Una piramide triangolare regolare ha base di lato $2a$. Il volume della piramide è $\frac{2}{3}a^3\sqrt{3}$.

a. Verifica che l'altezza della piramide è congruente al lato di base.

b. Calcola l'area della superficie totale della piramide.

c. Determina a quale distanza dal vertice della piramide va condotto un piano parallelo alla base, in modo che tale piano divida la piramide in due parti equivalenti.

d. Determina a quale distanza dal vertice della piramide va condotto un piano parallelo alla base, in modo che il prisma avente come basi la sezione del piano con la piramide e la sua proiezione ortogonale sulla base della piramide stessa abbia superficie totale di area massima.

e. Determina il raggio della sfera circoscritta alla piramide.

Quesiti

1. Vero o falso?

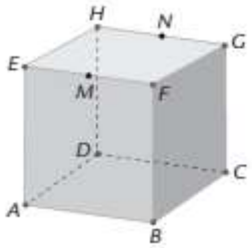
a. se la retta r è parallela al piano α e il piano α è parallelo al piano β, allora la retta r è parallela al piano β **V F**

b. nello spazio, data una retta r e un punto P appartenente alla retta r, esiste una sola retta passante per P e perpendicolare a r **V F**

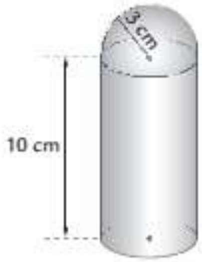
c. nello spazio, data una retta r e un punto P appartenente alla retta r, esiste una sola retta passante per P e parallela a r **V F**

d. se la retta r appartiene al piano α, la retta s appartiene al piano β, e i due piani α e β sono perpendicolari, allora le due rette r ed s sono complanari **V F**

2. Considera il cubo rappresentato in figura, dove M ed N sono, rispettivamente, i punti medi degli spigoli EF e GH. Determina da che cosa è costituita l'intersezione dei due piani: AEM ed EBG; ADH ed MFG; ABC ed ENF.



3. Un parallelepipedo ha spigoli di base di lunghezza 6 cm e 12 cm e altezza di 3 cm. Determina la lunghezza della diagonale di un cubo equivalente al parallelepipedo.
4. Il solido in figura è formato da un cilindro e da una semisfera che ha una base coincidente con quella del cilindro. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido.



5. Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza 2 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.

Geometria analitica nello spazio

Problema

Considera i due punti $C(-1, -2, 3)$ e $P(1, 0, 2)$.

a. Determina le coordinate del punto simmetrico di C rispetto a P.

b. Scrivi l'equazione della retta CP.

c. Tra i piani passanti per la retta CP, determina quello che passa per l'origine del sistema di riferimento.

d. Scrivi l'equazione della superficie sferica di centro C e passante per P.

e. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie sferica nel punto P.

Quesiti

1. Determina l'equazione del piano passante per $B(0, 1, -1)$ e $C(3, 2, 1)$ e parallelo al vettore $\vec{u}(0, 0, 5)$.

2. Determina i valori di k e $h \in \mathbf{R}$ tali che i piani $2x + hy - 2z + 3 = 0$ e $x + 2y + kz + 1 = 0$ siano paralleli.

3. Determina, sia in forma parametrica sia come intersezione di piani, l'equazione della retta passante per i punti $A(1, 2, -1)$ e $B(0, 1, 4)$.

4. Dato il punto $A(3, -2, 4)$ e il piano $x - 3y + 2z + 4 = 0$, scrivi l'equazione della retta passante per A e perpendicolare al piano.

5. Data la sfera di centro $C(1, 2, 3)$ e raggio 4, scrivi le equazioni dei piani tangenti alla sfera che hanno vettore normale $\vec{n}(0, 1, -1)$.

Calcolo combinatorio

Problema

Considera la parola OSSERVARE.

a. Quanti sono i suoi anagrammi, anche privi di significato?

b. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con la lettera A?

c. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con una vocale?

d. Considerato l'insieme X formato dalle lettere distinte da cui è formata la parola OSSERVARE, quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di X?

e. Quanti sono complessivamente i sottoinsiemi (propri o impropri) di X?

Quesiti

1. Le targhe delle automobili sono formate da una coppia di lettere, una terna di numeri e infine una coppia di lettere. Le lettere possono essere solo 22 perché sono state tolte la I, la O, la Q e la U. Quante targhe sono possibili?

2. In quanti modi posso mettere nella libreria 15 libri sapendo che sono di 2 autori diversi, che del primo autore ci sono 6 libri e del secondo 9 e che voglio mettere vicini i libri dello stesso autore?

3. In quanti modi diversi si possono scegliere 2 persone per un'interrogazione tra i 24 alunni di una classe?

4. In un gioco da tavolo si lanciano 5 dadi contemporaneamente. In quanti modi si possono presentare le 5 facce superiori?

5. La combinazione di una cassaforte è formata da 8 cifre (ciascuna scelta tra 0 e 9). Sapendo che le cifre possono ripetersi e che l'ultima cifra è pari, quante combinazioni sono possibili (considerando lo 0 pari)?

Probabilità

Problema

Un'urna contiene 112 dadi, di cui 56 sono equi, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che per ciascuno di essi la probabilità che esca 1 è $\frac{1}{2}$, e ciascuno degli altri numeri possa uscire con probabilità $\frac{1}{10}$.

Un dado viene estratto a caso e lanciato.

a. Qual è la probabilità di ottenere 3?

b. Qual è la probabilità di ottenere un numero dispari o multiplo di 3?

Un dado viene estratto e lanciato due volte.

c. Qual è la probabilità di ottenere 2 e 3?

d. Sapendo che nei due lanci si sono ottenuti i due numeri 2 e 3, qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

Quesiti

1. Supponiamo di avere un'urna contenente 15 palline numerate a 1 a 15. Si estraggono a caso due palline, una alla volta, con reinserimento. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

a. la prima pallina ha un numero pari e la seconda è numerata 10;

b. almeno una delle due palline ha un numero dispari.

2. Un'urna contiene palline numerate da 1 a 8. Supponiamo di estrarre a caso 2 palline in blocco. Calcola la probabilità che sia estratta la pallina numero 2 sapendo che la somma dei due numeri estratti è uguale a 8.

3. Due carte vengono estratte da un mazzo di 52, senza reinserimento. Calcola la probabilità:

a. che la prima carta sia di cuori e la seconda rossa;

b. che la seconda carta sia rossa.

4. Sono date 3 urne contenenti rispettivamente 15 biglie di cui 8 rosse, 25 biglie di cui 14 rosse e 10 biglie di cui 4 rosse. Si lancia un dado. Se esce 6 si sceglie la prima urna, se esce 4 si sceglie la seconda urna, altrimenti si sceglie la terza. Si estraggono 2 biglie contemporaneamente. Calcola la probabilità che le 2 biglie siano rosse.

5. Considera il seguente gioco. Si lancia un dado equo: se esce 1, si rilancia il dado e si vince se esce un numero pari; se esce un numero diverso da 1, si lanciano 2 dadi e si vince se il massimo tra i due valori ottenuti è al più 3. Calcola la probabilità che nel lancio iniziale sia uscito 1 sapendo di aver vinto.